

Nonlinear Material Design Using Principal Stretches

Abstract

- 弹性固体模拟，材料本构模型（描述材料应力与应变的关系）常常使用若干标准本构模型，比如Linear Corotational, StVK, Neo-Hookean, Ogden, Mooney-Rivlin等，但是材料空间远远不止这些；
- 文章提出了一种直观易于理解的材料编辑方法，通过编辑材料，达到标准本构模型不能达到的动画效果；
- 文章着重叙述了各向同性材料的编辑方法，也给出了正交异性材料的编辑方法；
- 基于有限元方法（FEM）模拟。

Isotropic Material Design

Isotropic Material Design

- What?
- How?

WHAT

Basis

- 形变: $\vec{x} = \phi(\vec{X}) = \mathbf{F}\vec{X} + \vec{b}$
 - \mathbf{F} 形变梯度, 表示一个单元的形变程度
- 主应变: $F = U \cdot \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \cdot V^T$
- 应变能: $\Psi = \Psi(F) = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

Basis

- 运动方程: $K \cdot \vec{x} + C \cdot \vec{v} + M \cdot \vec{a} = \vec{f}_{ext}$
 - K, C, M, f 分别是刚度矩阵、阻尼矩阵、质量矩阵、结点外力
 - M 为对角矩阵, 单元质量均分到结点
 - 通常阻尼选择Rayleigh阻尼, $C=aM+bK$
- 计算 K :

$$K = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial F^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2}$$

Assumption

- Assumption 11

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + f(\lambda_3) + g(\lambda_1 \lambda_2) + g(\lambda_2 \lambda_3) + g(\lambda_3 \lambda_1) + h(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3), \quad (11)$$

- 能量函数划分成三个一维能量函数 f, g, h , 分别表示主轴应变（长度变化）、剪切应变（面积变化）、体积变化的能量
- 虽然材料空间变小了，但是按照这种形式划分，易于编辑并且直观、易于理解（每一部分都有物理意义）。

Isotropic Material Design

- 基于 assumption 11 , 所以可以编辑能量函数 Ψ 中的 f, g, h

HOW

Stability

- 简化后:
 - $f'' > 0, g'' > 0, h'' > 0$

Spline Isotropic Materials

- 直接编辑 f', g', h' ，而不是 f, g, h
 - 理解直观， $f' g' h'$ 可以看作是力的变化
 - 满足稳定性条件， $f' g' h'$ 应该是递增函数

Spline Isotropic Materials

- 编辑 f' 为例：
 - 以一种默认模型（比如StVK）开始
 - 保持 g' h' 为默认的表达式
 - the user provides samples $(x_k, f'(x_k))$, $(1 \leq k \leq m)$
 - 保证samples在x, y方向递增
 - 使用Bezier插值，平滑穿过所有样本点

Orthotropic Material Design

Orthotropic Material Design

- 添加正交异性项

- w_j' : 曲线递增, 材料在j方向更stiff; 递减, 材料在j方向soft;

$$\Psi = \Psi_{iso}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \Psi_{ortho}, \quad (18)$$

$$\Psi_{ortho} = w_1(\bar{\lambda}_1) + w_2(\bar{\lambda}_2) + w_3(\bar{\lambda}_3), \quad (19)$$

$$\bar{\lambda}_i = \|\|Fm_i\|\|_2$$

- Thanks